ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ QUỲNH NGA

TÍNH LỒI CỦA METRIC KOBAYASHI TRÊN ĐA TẠP PHỨC TAUT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ QUỲNH NGA

TÍNH LỒI CỦA METRIC KOBAYASHI TRÊN ĐA TẠP PHỨC TAUT

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS Nguyễn Thị Tuyết Mai

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đề tài luận văn "**Tính lồi của metric Kobayashi trên đa tạp phức taut**" không có sự sao chép của người khác. Khi viết luận văn tôi có tham khảo một số tài liệu, tất cả đều có nguồn gốc rõ ràng và được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai. Nếu có vấn đề gì tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Quỳnh Nga

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai. Cô đã dành nhiều thời gian, công sức để hướng dẫn, trả lời những thắc mắc và giúp đỡ tôi hoàn thành bài luận văn này.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới bố, mẹ và các thành viên trong gia đình đã luôn động viên, ủng hộ tôi trong suốt thời gian qua.

Tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo trong trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên đã luôn nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu, đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi hoàn thành chương trình học và bảo vệ luận văn.

Bản thân tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên những thiếu sót chắc chắn khó tránh được. Tôi rất mong được thầy cô và các bạn đọc chỉ cho những thiếu sót đó.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2019

Học viên

Nguyễn Thị Quỳnh Nga

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

LỜI MỞ ĐẦU **1**

Chương 1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **2**

1.1 Đa tạp phức 2

1.2 Đa tạp phức taut 6

1.3 Khoảng cách Kobayashi trên đa tạp phức taut 9

Chương 2 TÍNH LỒI CỦA METRIC KOBAYASHI TRÊN ĐA TẠP PHỨC TAUT **13**

2.1 Metric Buseman – Kobayashi trên đa tạp phức taut 13

2.2 Tính lồi của metric Buseman – Kobayashi trên đa tạp phức taut 17

KẾT LUẬN **32**

Tài liệu tham khảo **33**

LỜI MỞ ĐẦU

Từ việc nghiên cứu metric Royden – Kobayashi và khoảng cách Kobayashi trên đa tạp phức taut, Masashi Kobayashi đã chứng minh được rằng đạo hàm của khoảng cách Kobayashi bằng metric Buseman – Kobayashi. Cụ thể là định lý sau:

Nếu M là một đa tạp phức taut thì Dd_M tồn tại và $Dd_M = \widehat{F}_M$.

Nhờ kết quả này Masashi Kobayashi đã chứng minh được một điều kiện cần và đủ cho tính lồi của của metric Royden – Kobayashi trên đa tạp phức taut sau:

Nếu M là một đa tạp phức taut thì F_M là lồi nếu và chỉ nếu

$$\lim_{\substack{q,q' \to p \\ q \neq q'}} \frac{d_M(q,q')}{d^*_M(q,q')} = 1$$

.

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu trình bày lại một cách chi tiết, rõ ràng kết quả nghiên cứu của Masashi Kobayashi về tính lồi của metric Royden – Kobayashi trên đa tạp phức taut.

Với mục đích như trên, ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận văn gồm 2 chương. Trong chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về đa tạp phức, đa tạp phức taut và khoảng cách Kobayashi trên đa tạp phức taut. Chương 2, chúng tôi trình bày một số kiến thức bổ sung, các bổ đề cơ sở và trình bày chi tiết, rõ ràng kết quả của Masashi Kobayashi về tính lồi của metric Royden – Kobayashi trên đa tạp phức taut.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức cơ sở về đa tạp phức, đa tạp phức taut và khoảng cách Kobayashi trên đa tạp phức. Các kiến thức này được tôi tham khảo trong tài liệu ([1]).

1.1 Đa tạp phức

Định nghĩa

Giả sử X là một không gian tô pô Hausdorff. Cặp (U, φ) được gọi là một bản đồ địa phương của X, trong đó U là tập mở trong X và $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ là ánh xạ, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\varphi(U)$ là tập mở trong $\mathbb{C}^n$.

ii) $\varphi : U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

Họ $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas) của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\{U_i\}_{i \in I}$ là một phủ mở của X.

ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ánh xạ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i (U_i \cap U_j) \to \varphi_j (U_i \cap U_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên X. Hai atlas A_1, A_2 được gọi là tương đương nếu hợp $A_1 \cup A_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các

atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X, và cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một *đa tạp phức* n chiều.

Ví dụ 1.1. ([1]) Giả sử D là miền trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, D là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D.Id_D)\}$.

Ví dụ 1.2. ([1]) Đa tạp xạ ảnh $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \,|z_i \neq 0\}$ với $i = 0, 1, \ \ldots \ , n$. Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^n$ là một phủ mở của $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$:

$$[z_0 : z_1 : \ \ldots \ : z_n] \to \left(\frac{z_0}{z_i}, \ \ldots \ , \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ \ldots \ , \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Ta có

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (z_0, \ \ldots \ , z_{i-1}, z_{i+1}, \ \ldots \ , z_n) \to \left(\frac{z_k}{z_j}\right)_{k \neq j}; k = 0, \ \ldots \ , m; z_i = 1.$$

Rõ ràng $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ là một đa tạp phức n chiều và gọi là đa tạp xạ ảnh n chiều.

Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

Định nghĩa 1.1. ([1]) Giả sử M, N là các đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f : M \to N$ được gọi là chỉnh hình trên M nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của M và mọi bản đồ địa phương (V,ψ) của N sao cho $f(U) \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(\mathrm{V})$$

là ánh xạ chỉnh hình.

Định nghĩa trên tương đương với với mọi $x \in M, y \in N$, tồn tại hai bản đồ địa phương (U, φ) và (V,ψ) tại x và y tương ứng sao cho

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(\mathrm{V})$$

là ánh xạ chỉnh hình.

Định nghĩa 1.2. ([1]) Giả sử $f : M \to N$ là song ánh giữa các đa tạp phức. Nếu f và f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì f được gọi là ánh xạ song chỉnh hình giữa M và N.

Không gian tiếp xúc và phân thớ tiếp xúc của đa tạp phức

Giả sử M là đa tạp phức m chiều và Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$. Giả sử $(U, \phi, \Delta^m$ là bản đồ địa phương quanh x, tức là U là một lân cận của x và $\phi : U \to \Delta$ là ánh xạ song chỉnh hình. Đặt $\phi = (z^1, ..., z^m)$. Khi đó, $(z^1, ..., z^m)$ là một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương quang x.

Đặt $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$, trong đó x^α và y^α là các giá trị thực. Khi đó, $(x^1, ..., x^m, y^1, ..., y^m$ là hệ tọa độ địa phương thực quanh x, ở đó M được xem như là đa tạp khả vi $2m$ chiều. Giả sử T_xM là không gian tiếp xúc của M tại x. Khi đó T_xM là không gian vector thực $2m$ chiều và

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right), \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right), ..., \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right) \right\} \tag{1.1}$$

là một cơ sở của T_xM. Ký hiệu $T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ là phức hóa của T_xM. Khi đó, (1.1) cũng là một cơ sở của không gian vector phức $T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Đặt

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \quad 1 \le j \le m.$$

Ta ký hiệu

$$T_xM = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x ; \xi^j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Khi đó T_xM là một không gian con tuyến tính phức m chiều của $T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, mà độc lập với cách chọn hệ tọa độ chỉnh hình địa phương $(z^1, ..., z^m)$. Ta gọi T_xM là không gian tiếp xúc của đa tạp phức M tại x.

Đặt

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM \text{ (hợp rời)}$$

Ta định nghĩa phép chiếu $\pi : TM \to M$ bởi điều kiện $\pi(T_xM) = x$. Khi đó TM có cấu trúc của đa tạp phức $2m$ chiều sao cho π là ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể hơn, giả sử $(z^1, ..., z^m)$ là hệ tọa độ chỉnh hình địa phương xác định trên một tập con mở U của M. Khi đó ta có

$$\pi^{-1}(U) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x ; x \in U, \xi^j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ánh xạ

$$\sum_{j=1}^{m} \xi^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_x \in \pi^{-1}(U) \mapsto (z^1(x), ..., z^m(x), \xi^1, ..., \xi^m) \in \mathbb{C}^{2m}$$

là một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương của TM. Ta gọi TM là phân thớ tiếp xúc chỉnh hình của đa tạp phức M.

Không gian phân thớ

Ánh xạ liên tục $\pi : E \to X$ giữa các không gian Hausdorff được gọi là phân thớ K-vector bậc r nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) Với mỗi $p \in X, E_p := \pi^{-1}(p)$ là K-không gian vector r chiều (E_p được gọi là thớ trên p);

ii) Với mỗi $p \in X$, tồn tại lân cận U của p và một đồng phôi

$$h : \pi^{-1}(U) \to U \times K^r$$

thỏa mãn $h(E_p) \subset \{p\} \times K^r$, và h_p xác định phép hợp thành

$$h_p : E_p \to \{p\} \times K^r \to K^r$$

là một đẳng cấu K-không gian vector (cặp (U, h) được gọi là tầm thường hóa địa phương).

Đối với một K-phân thớ vector $\pi : E \to X$, E được gọi là không gian toàn thể, X được gọi là không gian đáy, và ta thường nói E là một phân thớ vector trên X. Ta còn ký hiệu phân thớ vector trên là (E, π, X).